

С. С. Воронков

Псковский политехнический институт

Россия, 180680, г. Псков, ул. Л. Толстого, 4, e-mail: kafgid@ppi.psc.ru

О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом

Получена 30.12.2003, опубликована 07.05.2004

При математическом моделировании волновых процессов в газовом тракте энергетического оборудования – компрессоров, турбин и др. возникает вопрос о корректности использования изоэнтропного значения скорости звука. Получена формула для скорости звука в потоке вязкого газа с учетом диссипации энергии и теплообмена. Установлена существенная зависимость скорости звука в сдвиговом течении от интенсивности возмущения, частоты, скорости потока и др. Показано, что амплитуда изменения скорости звука в сдвиговом течении обратно пропорциональна амплитуде возмущения плотности и возрастает с увеличением скорости потока. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

При математическом моделировании волновых процессов в газовом тракте энергетического оборудования – компрессоров, турбин и др. возникает вопрос о корректности использования изоэнтропного значения скорости звука. С одной стороны, современные численные методы позволяют моделировать процессы с учетом диссипации энергии и теплообмена, которые не являются изоэнтропными, а с другой, в большинстве случаев в качестве скорости звука принимается изоэнтропное значение. Такой подход не всегда допустим, и требует уточнения значения скорости звука с учетом диссипации энергии и теплообмена.

В общем случае под скоростью звука понимают местную скорость распространения малых возмущений относительно движущегося газа в данной точке потока и определяют ее по формуле

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (1)$$

где a — скорость звука, p и ρ — давление и плотность газа.

Первые теоретические исследования по определению скорости звука в воздухе принадлежат И. Ньютону [1]. Впоследствии П. Лаплас показал, что совпадение теории с экспериментом значительно улучшается, если процесс распространения считать адиабатным и изоэнтропным. Дальнейшее развитие этого направления получено в работах Стокса, Кирхгофа, Гельмгольца, Рэля и других [2]. Общим выводом этих работ является следующее: при распространении звука в открытом пространстве в виде

плоских волн процесс распространения является адиабатным, и в первом приближении трение в газе не влияет на скорость звука. Лишь в очень узких трубах вязкость и теплопроводность воздуха оказывают заметное влияние на скорость распространения. Эти результаты, полученные для покоящейся среды, хорошо согласуются с экспериментальными данными и являются в настоящее время классическими. Но они, как было отмечено, получены для покоящейся среды и необоснованно экстраполируются на область движущегося газа. В потоке вязкого газа с поперечным сдвигом возникает интенсивная диссипация энергии, и предположения об изоэнтропности и адиабатности процесса при определении скорости звука требуют проверки.

Получим формулу для скорости звука в газе с учетом диссипации энергии и теплообмена. Выпишем уравнение энергии в виде [3]

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{V} = \Phi, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен; T — температура газа; e — удельная внутренняя энергия; \mathbf{V} — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время.

Рассмотрим совершенный газ. Тогда

$$de = C_V dT, \quad T = \frac{p}{\rho R}, \tag{4}$$

где C_V — изохорная теплоемкость, R — газовая постоянная.

Из уравнения неразрывности [4] следует

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в уравнение (2) и учитывая, что

$$\frac{C_V}{R} = \frac{1}{k-1}, \quad a_s^2 = k \frac{p}{\rho}, \tag{6}$$

после преобразований получим

$$\frac{dp}{dt} - a_s^2 \frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi. \quad (7)$$

Здесь k — показатель адиабаты, a_s — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука.

Полные производные в уравнении (7) представляют собой сумму локальной и конвективной производных и расписываются:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} p, \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} \rho. \quad (9)$$

Принимая во внимание (8) и (9), разделив левую и правую части уравнения (7) на $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, с учетом (1) после преобразований получим

$$a^2 = a_s^2 + \frac{\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}. \quad (10)$$

При выводе формулы (10) мы не делали никаких предположений о характере процесса распространения возмущения. Поэтому для совершенного газа она является наиболее общей и учитывает диссипацию энергии и теплообмен в потоке.

При рассмотрении распространения звука в потоке вязкого газа принцип суперпозиции не применим, так как уравнения, описывающие эти процессы, нелинейные и будет происходить взаимодействие основного потока с акустическим полем. Поэтому использовать полученную формулу (10) для определения скорости звука без знания характеристик потока вязкого газа не представляется возможным.

Для описания процесса распространения акустических возмущений в потоке вязкого газа составим математическую модель, включающую:

1. Уравнение неразрывности [4]

$$\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (11)$$

2. Уравнение Навье-Стокса в проекциях на оси x, y [4, 5]

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{V} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (12)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{V} \right]. \quad (13)$$

3. Уравнение энергии [3]

$$\rho \frac{de}{dt} + p \text{div} \mathbf{V} = \Phi. \quad (14)$$

4. Уравнение состояния для совершенного газа

$$p = \rho RT . \quad (15)$$

В этой системе из пяти уравнений неизвестных 5 величин: p, ρ, T, u, v .

Для повышения точности численных расчетов в качестве неизвестных используются консервативные переменные [5]: $\rho, \rho u, \rho v, E$ (E — удельная внутренняя энергия торможения). Систему уравнений (11–15) удобно записать в векторном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

где векторы U, F, G представляют собой упорядоченные наборы комбинаций основных переменных [5].

Численное решение системы уравнений (16) осуществлялось по двухшаговой схеме Браиловской [5]

$$U^{n+1} = U^n - \left[\frac{\delta F^n}{\delta x} + \frac{\delta G^n}{\delta y} \right] \Delta t, \quad (17)$$

$$U^{n+1} = U^n - \left[\frac{\delta F_I^{n+1}}{\delta x} + \frac{\delta F_V^n}{\delta x} + \frac{\delta G_I^{n+1}}{\delta y} + \frac{\delta G_V^n}{\delta y} \right] \Delta t, \quad (18)$$

где I и V — индексы соответственно невязких и вязких членов функций F и G ; $\frac{\delta}{\delta x}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$

представляются центральными разностями, $F_I^{n+1} = F_I(U^{n+1})$ и т. д.

Шаг по времени определялся из условия устойчивости [5]

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta^2 \text{Re}}{8}, \frac{\Delta}{|u| + |v| + a\sqrt{2}} \right), \quad (19)$$

где Δ — размер ячейки, $\Delta = \sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}$; Re — число Рейнольдса.

Программа реализована в среде MathCad Professional 2000.

Моделировался процесс распространения акустических возмущений в потоке вязкого газа в плоском канале. В качестве начальных условий задавалось стационарное ламинарное течение с параболическим распределением скоростей. Акустическое возмущение задавалось на входе в канал в виде гармонического сигнала с амплитудой возмущения плотности $\Delta\rho$. Скорость звука определялась по формуле

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} = \sqrt{\frac{p1 - p}{\rho1 - \rho}}, \quad (20)$$

где $p1, \rho1, p, \rho$ — значения давления и плотности на разных временных слоях в фиксированной точке канала.

Расчеты проводились в плоском канале. Количество узлов по оси x (вдоль канала) принималось $i = 51$, количество узлов по оси y (поперек канала) $j = 11$. Шаг по пространственной переменной $\Delta x = \Delta y = 10^{-2}$ м. Шаг по времени $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ с. Амплитуда возмущения плотности варьировалась в пределах $\Delta \rho = 10^{-10} \dots 10^{-11}$ кг/м³. Это значения звука, соответствующие порогу слышимости. Частота звука принималась (основной режим) 1000 Гц. Максимальная скорость потока на оси канала принималась (основной режим) $u_{max} = 0,1$ м/с, число Рейнольдса при этом равно 1323.

На рис. 1 приведен характерный закон изменения скорости звука в фиксированный момент времени вдоль канала вблизи стенки ($j = 10$). Приведены изоэнтропная скорость звука $ast10_{i,99}$ и скорость звука с учетом диссипации энергии и теплообмена $aprt10_{i,99}$. Изоэнтропное значение скорости звука $ast10_{i,99}$ практически постоянно — около 343,7 м/с. Скорость звука с учетом диссипации энергии и теплообмена $aprt10_{i,99}$ на определенных участках претерпевает разрывы. Скачки происходят относительно изоэнтропного значения скорости звука.

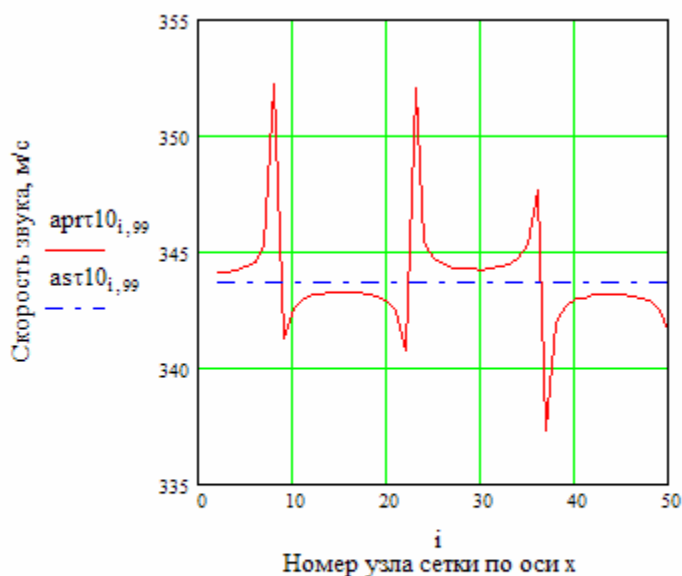


Рис. 1

На рис. 2 приведена зависимость амплитуды изменения скорости звука от амплитуды возмущения плотности. Амплитуда скорости звука определялась по рис. 1 как разность $(aprt10_{i,99} - ast10_{i,99})$ при $i = 30$ для различных моделируемых режимов. Зависимость обратно пропорциональная. С уменьшением амплитуды возмущения плотности амплитуда скорости звука возрастает. Этот закон следует также из формулы (10). При всех равных параметрах уменьшение амплитуды возмущения плотности приводит к уменьшению локальной производной плотности по времени, которая стоит

в знаменателе и, соответственно, к увеличению второго члена в формуле (10), определяющего амплитуду скорости звука.

Анализировалась зависимость скорости звука с учетом диссипации энергии и теплообмена от частоты. Зависимость получается более сложной и требует дополнительного анализа. Так, при частоте возмущения 1000 Гц ($\Delta\rho = 10^{-11}$ кг/м³, $u_{max} = 0,1$ м/с) $\Delta a = 0,9$ м/с, увеличение частоты в два раза (2000 Гц) приводит к уменьшению $\Delta a = 0,5$ м/с, при уменьшении частоты в два раза (500 Гц) $\Delta a = 1$ м/с.

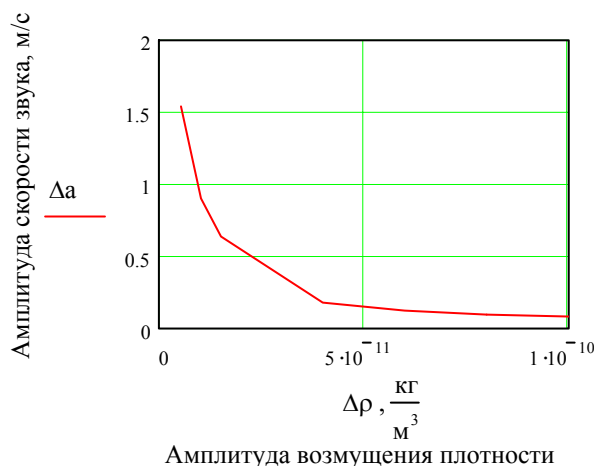


Рис. 2

На рис. 3 приведена зависимость амплитуды скорости звука от максимальной скорости потока. Как видно, эта зависимость близка к параболической. Возрастание максимальной скорости потока ведет к увеличению амплитуды изменения скорости звука, что является, видимо, одной из причин потери устойчивости ламинарного режима движения газа.

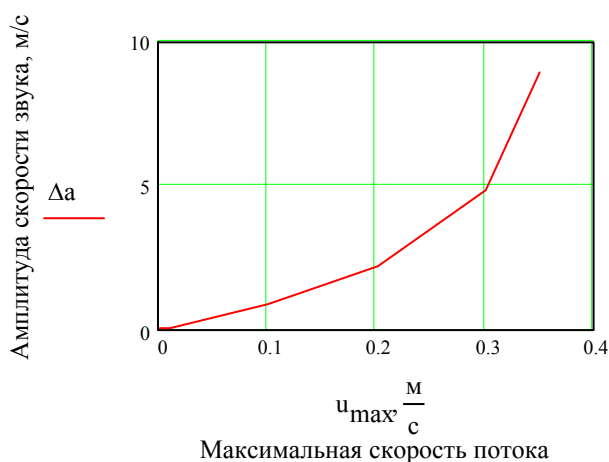


Рис. 3

Выводы:

1. Получена формула для скорости звука в потоке вязкого газа с учетом диссипации энергии и теплообмена.
2. Установлена существенная зависимость скорости звука в сдвиговом течении от интенсивности возмущения, частоты, скорости потока и др. Скорость звука с учетом диссипации энергии и теплообмена на определенных участках претерпевает разрывы.
3. Показано, что амплитуда изменения скорости звука в сдвиговом течении обратно пропорциональна амплитуде возмущения плотности и возрастает с увеличением скорости потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 687 с.
2. Рэлей. Теория звука. М.: Изд-во техн.-теор. лит., 1955. 475 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. 5-е изд. М.: Наука, 1978. 736 с.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.